قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

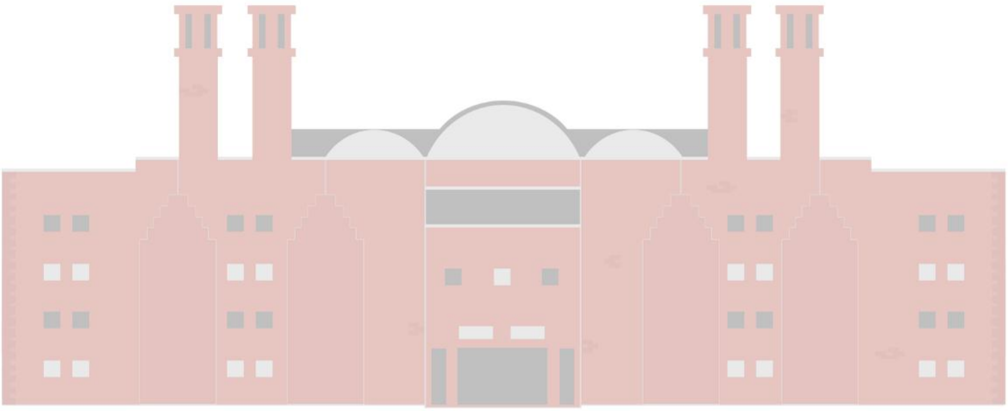
السنة الثانية / الفصل الأول

RED BUILDING TEAM

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الرابعة والعشرون

4 صفحات



الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 2014/11/23

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

مثال: أحسب التكامل:

$$\mathbf{I} = \int_{0}^{1} (\ln x)^n\, x^m dx$$

الحل:

$$\ln x = -\frac{t}{m+1}$$

$$x = e^{-\frac{t}{m+1}}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{m+1} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{m+1} e^{-\frac{t}{m+1}}$$

$$x = 0 \rightarrow t = \infty$$

$$x = 1 \rightarrow t = 0$$

$$I = -\int_{\infty}^{0} e^{-\frac{mt}{m+1}} \left(\frac{-t}{m+1}\right)^n \frac{dt}{m+1} e^{-\frac{t}{m+1}}$$

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t(m+1)}{m+1}} (-1)^n \frac{t^n}{(m+1)^{n+1}} dt = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^n dt$$

$$I = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

مثال: أحسب التكامل:

$$I = \oint_{L} \left(1 + \frac{1}{z}\right) dz \quad ; \quad \pm 2 \pm 2i : \text{مربع رؤوسه النقاط } L$$

الحل:

$f = 1 + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z}$ تحليلي في $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي
rbd

$$res(f,0)=1$$

فيكون حسب نظرية الرواسب

$$I=\oint_L\left(1+\frac{1}{z}\right)dz=2\pi i$$

مثال: أثبت أن

$$\boldsymbol{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}sin^2\theta}}=\frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\pi}}$$

الحل:

$$sin\,\theta=t\Rightarrow\cos\theta\ \,d\theta=dt$$

$$d\theta=\frac{dt}{cos\,\theta}=\frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\theta=0\Rightarrow t=0$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$$

$$I=\int_0^1\frac{\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}t^2}}=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{2-t^2}}$$

$$1-t^2=x\Rightarrow t=\sqrt{(1-x)}\Rightarrow\ dt=\frac{dx}{-2\sqrt{(1-x)}}$$

نعوض في التكامل مع تغيير حدود التكامل

$$\sqrt{2}\int_1^0\frac{\frac{dx}{-2\sqrt{(1-x)}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1x^{\frac{1}{2}}\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$x^2 = y \Rightarrow 2x\,dx = dy \;\Rightarrow\; dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

نعوض في التكامل

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 y^{\frac{-1}{4}}\,.\,(1-y)^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 y^{\frac{-3}{4}}\,.\,(1-y)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ حسب القانون

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{\frac{2\,\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{\pi}}$$

مثال: اوجد باستخدام صيغ والیس $\boldsymbol{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan\theta}\;d\theta}$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-\frac{1}{2}}\theta\,.\sin^{\frac{1}{2}}\theta\;\,d\theta = \frac{1}{2}\beta(a,b)$$

$$2b-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$2a - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\,\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

القائد هو ذلك الرجل الذي يتحمل المسؤولية فهو لا يقول غُلب رجالي إنما يقول غُلبت أنا ، فهذا هو الرجل حقا .